מבחן בקורס מודלים חישוביים, חישוביות וסיבוכיות (67521)

מועד ב, 18.8.23

מרצים: פרופ' עמרי וינשטין ופרופ' עודד שוורץ
מתרגלים: עופר לשקוביץ, יואב מורן, ונעמה שמש-הלוי
צאריות: יעל פורת ועופר פיינשטיין

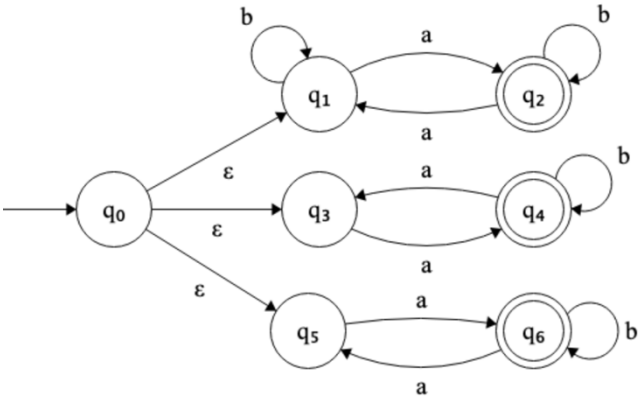
הוראות כלליות:

1. משך המבחן 3 שעות.
2. במבחן 9 שאלות, יש לענות על כולן.
3. סך הנקודות במבחן זה הוא 108 נקודות. ציון המבחן יהיה סך הנקודות שצברת, כאשר הציון המקסימלי שניתן לקבל הוא 100.
4. השיבו על השאלות על גבי טופס זה בלבד. המחברות הן טיוטה ולא ייבדקו.
5. במידה ואתם זקוקים למקום נוסף לצורך מענה על סעיף כלשהו, השתמשו בדפי התשובות הריקים המופיעים בסוף טופס זה. אם אתם זקוקים לדפי תשובות נוספים, עליכם לבקש מהמשגיח/ה טופס שלם נוסף. אין להוסיף דפים בודדים.
6. נסחו במדויק כל טענה בה אתם עושים שימוש. (מותר להשתמש בטענות שנלמדו בכיתה, בתרגול או בתרגיל אלא אם נתבקשתם להוכיח אותן בשאלה).
7. השימוש בכל חומר עזר אסור.

בהצלחה!

שאלה 1 (12 נקודות)

נתון ה-NFA הבא, המסומן ב-A:



כמה מחלקות מייהל-נרוד יש לשפת האוטומט $L(A)$?

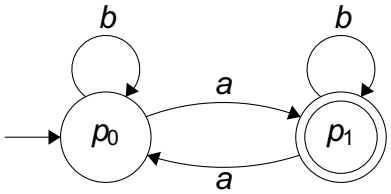
בתשובתכם ציירו את האוטומט המינימלי לשפה. אין צורך להוכיח שקילות בין אוטומטים.

מספר מחלקות השקילות: 2

הוכחה:

יש לשפה שתי מחלקות שקילות.

נשים לב ש-$L(A)$ היא למעשה איחוד של 3 שפות כאשר שתיים מהן מוכלות בשלישית, ולכן האוטומט הבא שקול ל-A:



המילים ε, a נמצאות במחלקות שקילות שונות עם זנב מפריד ε כי $a \in L$, אבל $\varepsilon \notin L$. כלומר יש לשפה לפחות שתי מחלקות שקילות MN. מצד שני האוטומט מכיל שני מצבים ולכן יש לשפה בדיוק שתי מחלקות שקילות.

שאלה 2 (12 נק')

נגדיר את השפה הבאה: $L = \{0^n 1^m 2^{n\cdot m} | m, n \in \mathbb{N}\}$.

טענה: $L \in CFL$.

הטענה (הקיפו): נכונה לא נכונה

הוכחה:

הטענה לא נכונה.

נניח בשלילה שהשפה ח"ה ונראה שהיא לא מקיימת את למת הניפוח לשפות ח"ה. יהי $p \geq 1$ קבוע הניפוח של L ונתבונן במילה $w = 0^p 1^p 2^{p^2}$. כעת $|w| > p$ ו-$w \in L$ ולכן היא מקיימת את תנאי הלמה, כלומר קיים פירוק $w = uvxyz$ כך ש- $1 \leq |vy| \leq |vxy| \leq p$ ולכל $i \geq 0$ מתקיים $uv^i xy^i z \in L$, בפרט $uxz \in L$.

אם $vy \in \{0,1\}^*$, אז $\#_2(uxz) = \#_2(w)$ וגם $\#_t(uxz) \leq \#_t(w)$ לכל $t \in \{0,1\}$, והאי שוויון חזק ללפחות t אחד כי $|vy| \geq 1$. נקבל:

$$\#_0(uxz) \cdot \#_1(uxz) < \#_0(w) \cdot \#_1(w) = \#_2(w) = \#_2(uxz)$$

בסתירה ל- $uxz \in L$.

לכן $\#_2(vy) \geq 1$, ומשום ש- $|vxy| \leq p$ נסיק כי $vy \in \{1,2\}^*$. נסמן $j = \#_1(vy)$ ו- $k = \#_2(vy)$, ונשים לב כי $1 \leq k + j \leq p$ ו-$k \geq 1$. מתקיים:

$$\#_0(uxz) \cdot \#_1(uxz) = p(p - j) = (p^2 - k) = \#_2(uxz).$$

כלומר $pj = k \geq 1$. אבל אז נובע כי $j \geq 1$, ולכן $k + j = pj + j \geq p + 1$ בסתירה ל- $1 \leq k + j \leq p$.

שאלה 3 (12 נקודות)

נסמן ב-$MN(L)$ את מספר מחלקות מייהל-נרוד של L.

טענה: קיימות $L_1, L_2 \in REG$ כך ש-$MN(L_1) \cdot MN(L_2) < MN(L_1 \cap L_2)$.

הטענה (הקיפו): נכונה לא נכונה

הוכחה/הפרכה:

הטענה לא נכונה.

נסמן $n_i = MN(L_i)$ ויהיו A_1, A_2 DFA מינימליים עבור L_1, L_2 בהתאמה. נזכור כי ניתן לזהות את $L_1 \cap L_2$ בעזרת אוטומט המכפלה של A_1, A_2. כלומר יש DFA עבור $L_1 \cap L_2$ עם $n_1 n_2$ מצבים, ולכן בהכרח $MN(L_1 \cap L_2) \leq n_1 n_2$.

שאלה 4 (12 נקודות)

יהיו מ״ט M_1, M_2. נגדיר את השפה הבאה : $L = \{\langle M1, M2\rangle \mid L(M1) \leq_m L(M2)\}$.

לאיזו מחלקת חישוביות שייכת L?

המחלקה (הקיפו) : $\overline{RE \cup coRE}$ $\quad coRE \setminus R \quad RE \setminus R \quad R$

הוכחה :

השפה נמצאת ב- $\overline{RE \cup CoRE}$. **ראו הערה בסוף.**

נראה רדוקציה $ALL_{TM} \leq_m L$:

בנייה : בהינתן קידוד $< M >$, הרדוקציה תחזיר $< M, M_{ALL} >$ כאשר M_{ALL} היא מכונה שמקבלת כל קלט.

חשיבות : הרדוקציה מוסיפה מחרוזת קבועה לקלט, ולכן חשיבה.

נכונות :

- אם $< M > \in ALL_{TM}$ אז $L(M) = \Sigma^*$, ולכן פונקציית הזהות היא רדוקציה מ-$L(M)$ ל- $L(M_{ALL}) = \Sigma^*$, כלומר $< M, M_{ALL} > \in L$.
- אם $< M > \notin ALL_{TM}$ אז קיימת $w \notin L(M)$, אבל לכל פונקציה $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ מתקיים ש- $f(w) \in \Sigma^* = L(M_{ALL})$, כלומר f היא לא רדוקציה $M \leq_m M_{ALL}$. מכאן שאין רדוקציה כזו ו- $< M, M_{ALL} > \notin L$.

הערה:

השפה $\{\langle M1, M2\rangle \mid M_1, M_2 \text{ are TMs, and } L(M1) \leq_m L(M2)\}$ אכן שייכת ל - $\overline{RE \cup CoRE}$.

אמנם, מניסוח השאלה משתמע שהמכונות M_1, M_2 הן קבועות, ולכן השפה L היא אחת מבין השתיים :

1. השפה הריקה, אם לא מתקיים $L(M1) \leq_m L(M2)$.
2. השפה $\{\langle M1, M2\rangle\}$, אם כן מתקיים $L(M1) \leq_m L(M2)$.

כלומר, בכל מקרה L היא בגודל לכל היותר 1 ובפרט ב-R.

פתרונות נכונים עבור המחלקה R יתקבלו.

שאלה 5 (12 נקודות)

תזכורות: (1) אנומרטור E היא מ״ט עם מדפסת שכותבת מילים על סרט הפלט

(2) סדר לקסיקוגרפי הוא סידור המילים בשפה לפי סדר הא״ב ואורך המילים.

למשל, אם $\Sigma = \{0,1\}$ אז סידור מילים לקסיקוגרפי של Σ הוא: $\{\varepsilon, 0,1,00,01,10,11,000, \dots\}$.

טענה: אם אנורמטור E מדפיס שפה L לפי סדר לקסיקוגרפי אז $L \in R$.

הטענה (הקיפו): נכונה לא נכונה

הוכחה:

ראשית נשים לב שאם $L(E)$ סופית אז היא בפרט ב-R ולכן נותר להוכיח רק עבור המקרה האינסופי.

נסמן ב-$[w]$ את המיקום הלקסיקוגרפי של המילה w ב-Σ^*.

בהינתן E אנומרטור שמדפיס בסדר לקסיקוגרפי נבנה מ״ט M שמכריעה את $L(E)$:

עבור הקלט $x \in \Sigma^*$, M תסמלץ את E ועבור כל מילה w ש-E מדפיס תפעל כך:

- אם $[w] < [x]$ – נמשיך לרוץ.
- אם $[w] = [x]$ כלומר $x = w$ – נקבל את x.
- אם $[w] > [x]$ - נדחה את x.

נכונות: $x \in L(E)$ אם״ם E הדפיס את x אם״ם E הדפיס את x לפני כל המילים המופיעות אחריו בסדר הלקסיקוגרפי אם״ם $x \in L(M)$.

עצירה: מהנכונות מתקיים ש-M עוצרת ומקבלת כל מילה ב-$L(E)$. כעת נראה שהיא עוצרת על כל $x \notin L(E)$ (מהנכונות ינבע שהיא דוחה כל מילה כזו):
$L(E)$ אינסופית, ולכן היא מכילה מילה מאורך גדול כרצוננו. נסמן את המילה הראשונה ב-$L(E)$ שיותר ארוכה מ-$|x|$ ב-w ונשים לב שבהכרח $[w] > [x]$. בנוסף, נזכור כי E מדפיס את w אחרי זמן סופי ומהגדרת M, אם היא עדיין לא עצרה אז היא תעצור כאשר E תדפיס את w.

בסך הכל הראנו מ״ט המכריעה את $L(E)$ ולכן $L(E) \in R$.

שאלה 6 (12 נקודות)

נגדיר את השפה הבאה : $L = \{\langle M, x, y\rangle | if\ M\ accepts\ x\ then\ M\ rejects\ y\}$.

לאיזו מחלקת חישוביות שייכת L?

המחלקה (הקיפו) : $\overline{RE \cup coRE}$ $\quad coRE \setminus R \quad RE \setminus R \quad R$

הוכחה :

נראה שתי רדוקציות :

1. $HALT_{TM} \leq_m L$ – הוכחנו בכיתה כי $HALT_{TM} \notin coRE$ ולכן ממשפט הרדוקציה נקבל $L \notin coRE$.

בנייה : נציע את הרדוקציה הבאה : בהינתן קלט $\langle M, w\rangle$ נחזיר $\langle K, w_0, w\rangle$ כאשר w_0 מוגדרת להיות המילה הראשונה בסדר מינלקס ומתקיים $w \neq w_0$, K קידוד של מ"ט הבאה : בהינתן קלט $x \in \Sigma^*$ המכונה K פועלת באופן הבא :

עבור כל $x \neq w$ המכונה מקבלת את x. אחרת, המכונה מריצה את M על w– אם M עצרה נדחה את w.

חישוביות : המכונה K היא וריאציה של מ"ט אוניברסלית שתחזיק את הקידוד של M ו w.

נכונות : יהי $\langle M, w\rangle \in HALT_{TM}$ - ראשית K מקבלת כל קלט שונה מw בנוסף M עוצרת על w ולכן K תדחה את w. בסך הכל K מקבלת את $x = w_0$ אבל דוחה את $y = w$ ולכן מתקיים $\langle K, w_0, w\rangle \in L$.

יהי $\langle M, w\rangle \notin HALT_{TM}$ - אז K מקבלת את w_0. בנוסף M לא עוצרת על w ולכן K לא עוצרת על w. בסך הכל K מקבלת את $x = w_0$ אבל לא דוחה (לא עוצרת) את $y = w$ ולכן מתקיים $\langle K, w_0, w\rangle \notin L$.

2. $\overline{A_{tm}} \leq_m L$ – הוכחנו בכיתה כי $\overline{A_{tm}} \notin RE$ ולכן ממשפט הרדוקציה נקבל $L \notin RE$.

בנייה : נציע את הרדוקציה הבאה : בהינתן קלט $\langle M, w\rangle$ נחזיר $\langle M, w, w\rangle$.

חישוביות : כמו למעלה.

נכונות : יהי $\langle M, w\rangle \in \overline{A_{tm}}$ – כלומר M לא מקבלת את w. פלט הרדוקציה יהיה $\langle M, w, w\rangle$ המקיים את התנאי של השפה באופן ריק כיוון ש-M לא מקבלת את w.

יהי $\langle M, w\rangle \notin \overline{A_{tm}}$ אז M מקבלת את w ולכן M מקבלת את w.

ומתקיים $\langle M, w, w\rangle \notin L$.

בסך הכל הראנו $L \notin RE \wedge L \notin coRE$ ונקבל $L \in \overline{RE \cup coRE}$.

שאלה 7 (12 נקודות)

טענה: אם קיימות שפות $L_1, L_2 \in NP$ כך ש-$L_1 \cdot L_2 \in coNP - hard$, אז $NP = coNP$.

הטענה (הקיפו): נכונה לא נכונה

הוכיחו:

ראשית נשים לב כי NP סגורה לשירשור: בהינתן N_1 ו-N_2 שתי מכונות NTM, עם זמני ריצה $t_1: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ו- $t_2: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ בהתאמה, הNTM N שעבור קלט w מנחשת חלוקה $w = w_1 \cdot w_2$, ואז לכל $i = 1,2$ מריצה את N_i על w_i, ומקבלת אילו שתי המכונות קיבלו ואחרת דוחה, מכריעה את השירשור $L(N_1) \cdot L(N_2)$ בזמן $t(n) = t_1(n)^2 + t_2(n)^2 + n$ (ה-n האחרון הוא הזמן הנדרש לניחוש החלוקה והריבועים הם עבור הסימולציה). פולינומים סגורים לחיבור וכפל, ולכן אם N_1 ו-N_2 רצות בזמן פולינומיאלי, אזי גם N.

כעת נניח שקיימות $L_1, L_2 \in NP$ כך ש-$L_1 \cdot L_2 \in coNP - hard$. לכן מן הסגירות לשרשור של NP נובע כי השפה $L_1 \cdot L_2$ היא ב-NP וגם $coNP$-קשה. נסיק כי $coNP \subseteq NP$. אכן, לכל $L' \in coNP$ מתקיים $L' \leq_p L_1 \cdot L_2 \in NP$, וממשפט הרדוקציה הפולינומיאלי נקבל כי $L' \in NP$.

נראה כי $coNP \subseteq NP \Longrightarrow NP \subseteq coNP$ ונסיק את השוויון הנדרש: נניח כי $coNP \subseteq NP$. אז לכל $L \in NP$ מתקיים ש-$\bar{L} \in coNP \subseteq NP$.

שאלה 8 (12 נקודות)

נגדיר את השפה:

$$L = \{\langle G,k\rangle | G \text{ contains a clique and an independet set both of size } k\}$$

מהי מחלקת סיבוכיות הקטנה ביותר אליה שייכת L?

המחלקה (הקיפו): P $NP-complete$ $coNP-complete$

הוכיחו:

קשיות ל-NP: נראה רדוקציה מהשפה Clique, וכיוון שזו שפה NP קשה (הוכחנו בכיתה) נקבל שגם L היא NP קשה.

בניה: עבור קלט (G,k), נבדוק אם $k < n$ כאשר n מספר הקודקודים בגרף. אם לא, נחזיר קלט כלשהו שאינה בשפה. אחרת -נחזיר את הזוג (G′,k) כאשר G′ הוא G בתוספת k-1 צמתים חדשים שלא מחוברים לאף צומת ב-G.

זמן ריצה: נדרש להעתיק את הגרף מהקלט, להוסיף מספר של צמתים (שאינו קבוע אך ליניארי במספר הצמתים בגרף הקלט) חדשים ולהעתיק את k. סה״כ זמן ריצה פולי.

נכונות: הצמתים החדשים לא מחוברים לאף צומת ולכן לא משפיעים על גדלי הקליקות. כלומר ב-G′ יש קליקה בגודל k אם״ם ב-G יש קליקה בגודל k.

בנוסף, ב-G′ יש קב׳ ב״ת של k צמתים: הצמתים החדשים + צומת כלשהו ב-G.

מסקנה: ב-G יש קליקה בגודל k אם״ם ב-G′ יש גם קליקה בגודל k וגם קבוצה ב״ת של צמתים בגודל k.

כלומר

$$(G,k) \in Clique \text{ iff } (G',k) \in L$$

שאלה 9 (12 נקודות)

טענה: $SPACE(n^5) \subseteq NTIME(n^2)$.

הטענה (הקיפו): נכונה לא נכונה

הוכחה:

פתרון הנשען על $NTIME(f(n)) \subseteq DSPACE(f(n))$:

ראשית ראינו בהרצאה כי $NTIME(f(n)) \subseteq DSPACE(f(n))$ לכל $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. בפרט,

$$NTIME(n^2) \subseteq SPACE(n^2)$$

משום שבנוסף $SPACE(n^2) \subseteq SPACE(n^5)$, נסיק כי אם $SPACE(n^5) \subseteq NTIME(n^2)$ אז:

$$SPACE(n^2) \subseteq SPACE(n^5) \subseteq NTIME(n^2) \subseteq SPACE(n^2)$$

ובפרט, $SPACE(n^2) = SPACE(n^5)$.

אך זו סתירה למשפט ההיררכיה במקום, שכן n^5 פולינום (ולכן חשיב במקום) ובנוסף $n^2 \ll n^5$ ולכן $SPACE(n^2) \subsetneq SPACE(n^5)$.

פתרון באמצעות סאוויץ':

מתקיים-

$$NTIME(n^2) \subseteq NSPACE(n^2) \overset{\text{Savitch}}{\subseteq} SPACE(n^4) \overset{\text{Hierarchy}}{\subsetneq} SPACE(n^5)$$

ולכן הטענה לא נכונה.

עמוד תשובות נוסף, מספר 1

המשך שאלה _____ סעיף _____

עמוד תשובות נוסף, מספר 2

המשך שאלה _____ סעיף _____

עמוד תשובות נוסף, מספר 3

המשך שאלה _____ סעיף _____

עמוד תשובות נוסף, מספר 4

המשך שאלה _____ סעיף _____

עמוד תשובות נוסף, מספר 5

המשך שאלה _____ סעיף _____